



Meccanica dei Materiali



Corso di Laurea Specialistica in INGEGNERIA MECCANICA

Ing. Giuseppe PITARRESI

MFEP: Concetti di base della Meccanica della Frattura Elasto-Plastica.

25/05/2008



MFEP: Concetti di base della Meccanica della Frattura Elasto-Plastica.

DIMA
www.dima.unipa.it

Meccanica dei Materiali - G. Pitarresi

a) Comportamento statico dei materiali:

- a1. Il problema elastico e leggi costitutive elastiche.
- a2. L'energia di deformazione e i teoremi energetici.
- a3. Il comportamento a trazione.

b) Meccanica della frattura:

b1. Concetti di base.

b2. Meccanica della frattura lineare elastica (LEFM).

- 2.1 Stato di tensione all'apice della cricca.
- 2.2 La zona plastica all'apice della cricca.
- 2.3 L'approccio Energetico.
- 2.4 Caratterizzazione sperimentale dei parametri della tenacità alla frattura del materiale.

b3. Meccanica della frattura elasto-plastica (EPFM).

- 3.1 Caratterizzazione sperimentale dei parametri della tenacità del materiale nella EPFM.

b4. Studio della crescita dei difetti.

- 4.1 La propagazione sub-critica della cricca per fatica.
- 4.2 Fenomeni di crescita della cricca dipendenti dal tempo in presenza di carichi stazionari.

b5. Meccanismi di Frattura.

c) I materiali strutturali:

- c1. Riepilogo delle principali proprietà meccaniche di riferimento.
- c2. I materiali ingegneristici.
- c3. Criteri di scelta dei materiali nella progettazione.

d) Caratterizzazione meccanica dei materiali:

- d1. Standards, norme e protocolli internazionali di riferimento.
- d2. Le macchine per le prove sui materiali.



MFEP: Concetti di base della Meccanica della Frattura Elasto-Plastica.

1. Frattura controllata dal fattore K;
2. Collasso plastico;
3. Campi di applicazione della MFLE e della MFEP;
4. Il parametro J-Integral;
5. Aspetti relativi al J-Integral;
6. J come tasso di rilascio energetico non lineare;
7. J come parametro tensionale;
8. La zona delle larghe deformazioni;
9. Frattura controllata dal parametro J (cricca stazionaria);
10. Crescita stabile ed instabile della cricca: Curve J_R ;
11. L'approccio COD: Crack Opening Displacement;
12. Relazioni tra J e il CTOD.
13. I parametri della MFEP: J, COD, CTOD, J_{IC} e δ_{tc} ;
14. Metodo di Begley e Landes per la misura di J_{IC} ;
15. Standards per la valutazione sperimentale di δ e δ_{tc} .

3/40



Traduzione del paragrafo 2.9 dal titolo: **K-controlled Fracture**, tratto dal testo:

T.L. Anderson - *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* (third edition), CRC Press, 2005.

2.9 K-CONTROLLED FRACTURE

Section 2.6.1 introduced the concept of the singularity-dominated zone and alluded to single-parameter characterization of crack-tip conditions. The stresses near the crack tip in a linear elastic material vary as $1/\sqrt{r}$; the stress intensity factor defines the amplitude of the singularity. Given the equations in Table 2.1 to Table 2.3, one can completely define the stresses, strains, and displacements in the singularity-dominated zone if the stress intensity factor is known. If we assume a material fails locally at some combination of stresses and strains, then crack extension must occur at a critical K value. This K_{crit} value, which is a measure of *fracture toughness*, is a material constant that is independent of the size and geometry of the cracked body. Since energy release rate is uniquely related to stress intensity (Section 2.7), G also provides a single-parameter description of crack-tip conditions, and G_c is an alternative measure of toughness.

The foregoing discussion does not consider plasticity or other types of nonlinear material behavior at the crack tip. Recall that the $1/\sqrt{r}$ singularity applies only to linear elastic materials. The equations in Table 2.1 to Table 2.3 do not describe the stress distribution inside the plastic zone. As discussed in Chapter 5 and Chapter 6, the microscopic events that lead to fracture in various materials generally occur well within the plastic zone (or damage zone, to use a more generic term). Thus, even if the plastic zone is very small, fracture may not nucleate in the singularity-dominated zone. This fact raises an important question: Is stress intensity a useful failure criterion in materials that exhibit inelastic deformation at the crack tip?

Under certain conditions, K still uniquely characterizes crack-tip conditions when a plastic zone is present. In such cases, K_{crit} is a geometry-independent material constant, as discussed below.

Consider a test specimen and structure loaded to the same K_I level, as illustrated in Figure 2.37. Assume that the plastic zone is small compared to all the length dimensions in the structure and test specimen. Let us construct a free-body diagram with a small region removed from the crack tip of each material. If this region is sufficiently small to be within the singularity-dominated zone, the stresses and displacements at the boundary are defined by the relationships in Table 2.1 and Table 2.2. The disc-shaped region in Figure 2.37 can be viewed as an independent problem. The imposition of the $1/\sqrt{r}$ singularity at the boundary results in a plastic zone at the crack tip. The size of the plastic zone and the stress distribution within the disc-shaped region are a function only of the boundary conditions and material properties. Therefore, even though we do not know the actual stress distribution in the plastic zone, we can argue that it is uniquely characterized by the boundary conditions, i.e., K_I characterizes crack-tip conditions even though the $1/\sqrt{r}$ singularity does not apply to the plastic zone. Since the structure and test specimen in Figure 2.37 are loaded to the same K_I value, the crack-tip conditions must be identical in the two configurations. Furthermore, as the load is increased, both configurations will fail at the same critical stress intensity, provided the plastic zone remains small in each case. Similarly, if both structures are loaded in fatigue at the same ΔK , the crack-growth rates will be similar as long as the cyclic plastic zone is embedded within the singularity-dominated zone in each case (see Chapter 10).

Figure 2.38 schematically illustrates the stress distributions in the structure and test specimen from the previous figure. In the singularity-dominated zone, a log-log plot of the stress distribution is linear with a slope of $-1/2$. Inside of the plastic zone, the stresses are lower than predicted by the elastic solution, but are identical for the two configurations. Outside of the singularity-dominated zone, higher-order terms become significant (Equation (2.36)) and the stress fields are different for the structure and test specimen. K does not uniquely characterize the magnitude of the higher-order terms.

As the plastic zone increases in size, it eventually engulfs the singularity zone, and there is no longer a region where the stress varies as $1/\sqrt{r}$. In such cases, K no longer characterizes stresses near the crack tip. What this means in practical terms is that LEFM is not valid once the plastic zone size becomes large relative to key dimensions such as the crack size.

Frattura controllata dal parametro K

Nella sezione 2.6.1 si era introdotto il concetto di zona dominata dalla singolarità, implicando la possibilità di caratterizzare le condizioni all'apice della cricca con un unico parametro. Le tensioni prossime all'apice della cricca in un materiale elastico lineare variano secondo $r^{-0.5}$; il Fattore di Intensificazione delle Tensioni definisce l'ampiezza della singolarità. Mediante le equazioni in tabella 2.1 e 2.3, si possono completamente definire le tensioni, deformazioni e gli spostamenti nella zona dominata dalla singolarità se il Fattore di Intensificazione delle Tensioni è noto. Se si assume che un materiale si rompa localmente per una data combinazione di tensioni e deformazioni, allora la crescita della cricca deve aspettarsi per un dato valore critico di K . Questo valore K_{crit} , che rappresenta una misura della tenacità alla frattura, è una proprietà del materiale che è indipendente dalle dimensioni e dalla forma del corpo criccato. Dal momento che il Tasso di Rilascio di Energia è univocamente legato a K , anche G allora rappresenta un parametro univoco di caratterizzazione delle condizioni all'apice della cricca, e G_c è quindi una misura alternativa di tenacità.

L'analisi precedente non considera la plasticità o altre tipologie di comportamento non-lineare del materiale all'apice della cricca. Si ricordi infatti che la singolarità $r^{-0.5}$ vale solamente per materiali elastici lineari. Le equazioni di tabella 2.1 e 2.3 non descrivono lo stato di tensione all'interno della zona plastica. Come discusso nei Capitoli 5 e 6, i fenomeni a livello microscopico che conducono alla frattura in molti materiali di solito si verificano ben dentro la zona plastica (o più genericamente la zona di danneggiamento). Quindi, anche se la zona plastica è molto piccola, la frattura potrebbe non originarsi nella zona dominata dalla singolarità. Questo fatto fa nascere un'importante domanda: criteri di cedimento basati sull'intensità delle tensioni sono criteri utili in quei materiali che esibiscono deformazioni non-elastiche all'apice della cricca?

Sotto certe condizioni, K caratterizza ancora in modo univoco le condizioni all'apice della cricca, anche quando una zona plastica è presente. In questi casi K_{crit} è ancora una proprietà del materiale non dipendente dalla geometria.

Si considerino un provino ed una struttura caricati sino allo stesso valore di K , come mostrato nella figura 2.37 (vedi slide successiva). Si supponga che la zona plastica sia piccola in confronto alle altre dimensioni principali del provino e della struttura. Si costruisca quindi un diagramma di corpo libero con una piccola regione rimossa in corrispondenza dell'apice della cricca per ognuno dei materiali. Se la zona è sufficientemente piccola da essere compresa all'interno della zona dominata dalla singolarità, le tensioni e gli spostamenti al contorno della regione sono definiti dalle relazioni in tabella 2.1 e 2.2. La regione a forma circolare può essere considerata come un problema indipendente. L'imposizione della singolarità $r^{-0.5}$ lungo i contorni, risulta nella nascita di una zona plastica all'apice della cricca. Le dimensioni della zona plastica e la distribuzione di tensioni all'interno della regione circolare sono funzione solamente delle condizioni al contorno e delle proprietà del materiale. Per cui, anche se non si conosce la reale distribuzione di tensioni all'interno della zona plastica, si può ritenere che questa sia univocamente caratterizzata dalle condizioni al contorno, cioè K_I definisce le condizioni all'apice della cricca anche se la singolarità $r^{-0.5}$ non è valida all'interno della zona plastica. S'intanto che la struttura ed il provino sono caricati sino allo stesso valore di K_I , le condizioni all'apice della cricca devono essere identiche per le due configurazioni. Inoltre, al crescere del carico, entrambe le strutture si romperanno per lo stesso valore critico di K , purché la zona plastica sia mantenga piccola in entrambe i casi. Analogamente se entrambe le strutture sono caricate a fatica allo stesso valore di ΔK , le velocità di crescita delle cricche saranno simili finché la zona plastica ciclica è confinata all'interno della zona dominata dalla singolarità, in entrambe i casi.

La figura 2.38 (vedi slide successiva) illustra in modo schematico la distribuzione delle tensioni nella struttura e nel provino dalla figura precedente. Nella zona dominata dalla singolarità, un diagramma doppio-logaritmico della distribuzione delle tensioni ha andamento lineare con inclinazione di -0.5 . All'interno della zona plastica le tensioni saranno più piccole rispetto a quelle previste dalla soluzione elastica, ma sono comunque identiche per le due configurazioni. Al di fuori della zona dominata dalla singolarità, i termini di ordine superiore cominciano ad assumere importanza significativa (Eq. 2.36) e i campi di tensione sono adesso differenti per la struttura e per il provino. K non caratterizza in modo univoco l'ampiezza dei termini di ordine superiore.

Con il crescere in dimensioni della zona plastica, questa ad un certo punto giunge a riempire la zona singolare, e non vi è più una regione dove le tensioni variano secondo la singolarità $r^{-0.5}$. In questi casi, K non caratterizza più lo stato di tensione all'apice della cricca. Cosa significa questo in termini pratici è che la MFLE non è più valida una volta che le dimensioni della zona plastica diventano larghe rispetto a dimensioni chiave quali ad esempio la lunghezza della cricca.

4/40

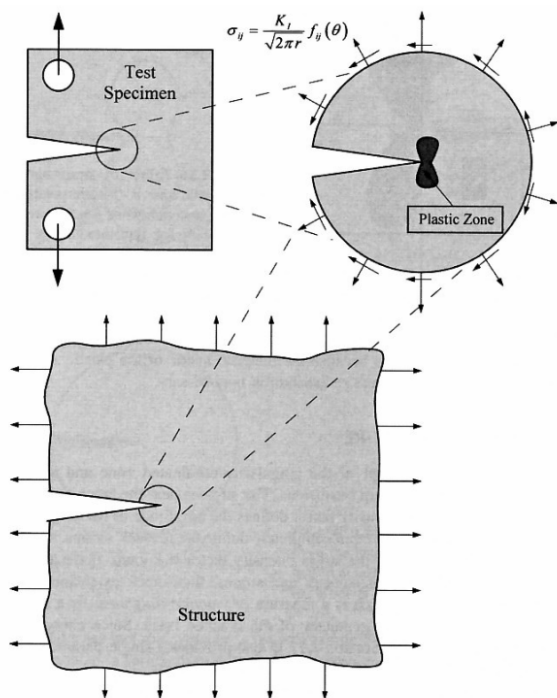


FIGURE 2.37 Schematic test specimen and structure loaded to the same stress intensity. The crack-tip conditions should be identical in both configurations as long as the plastic zone is small compared to all relevant dimensions. Thus, both will fail at the same critical K value.

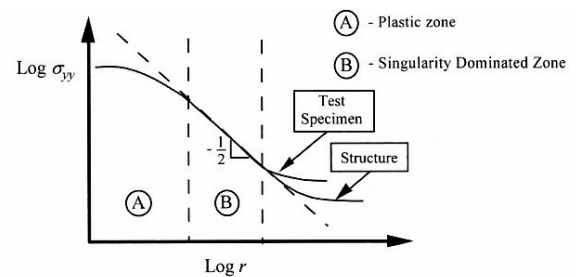
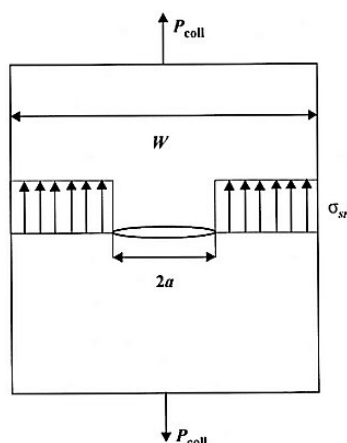


FIGURE 2.38 Crack-tip stress fields for the specimen and structure in Figure 2.37.



Quando in un elemento è presente una cricca, in generale non è detto che l'elemento sia destinato a danneggiarsi a seguito di propagazione instabile della cricca (cioè a **frattura**). Può infatti raggiungersi prima una condizione di snervamento generalizzato della sezione resistente e quindi una rottura per **collasso plastico**.

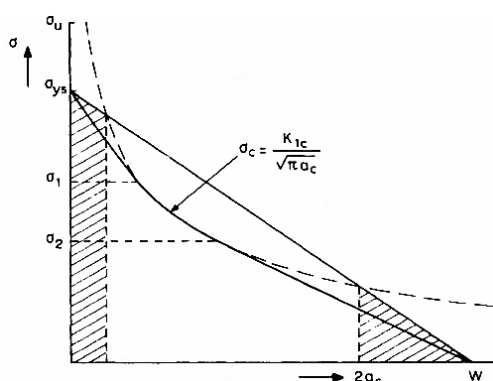
Si consideri ad esempio il caso di una piastra con cricca centrata passante. Usando la notazione della figura a sinistra si possono scrivere e confrontare tra loro le condizioni di rottura per frattura e per collasso plastico (ipotizzando per questo secondo caso che il materiale si comporti in modo elastico perfettamente plastico):

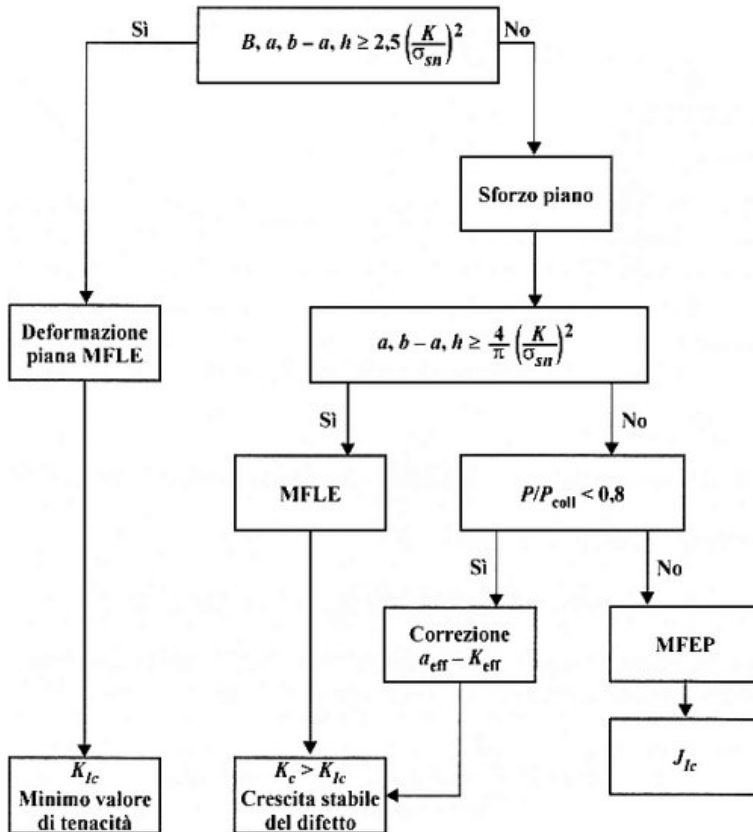
$$(\sigma_c)_{fr} = \frac{K_{Ic}}{\beta\sqrt{\pi a}}$$

$$P_{coll} = \sigma_{sn}(W - 2a)B \rightarrow (\sigma_c)_{coll} = \frac{P_{coll}}{WB} = \frac{\sigma_{sn}(W - 2a)}{W}$$

Si ha collasso plastico prima della frattura se:

$$(\sigma_c)_{coll} \leq (\sigma_c)_{fr} \rightarrow \frac{\sigma_{sn}(W - 2a)}{W} \leq \frac{K_{Ic}}{\beta\sqrt{\pi a}}$$

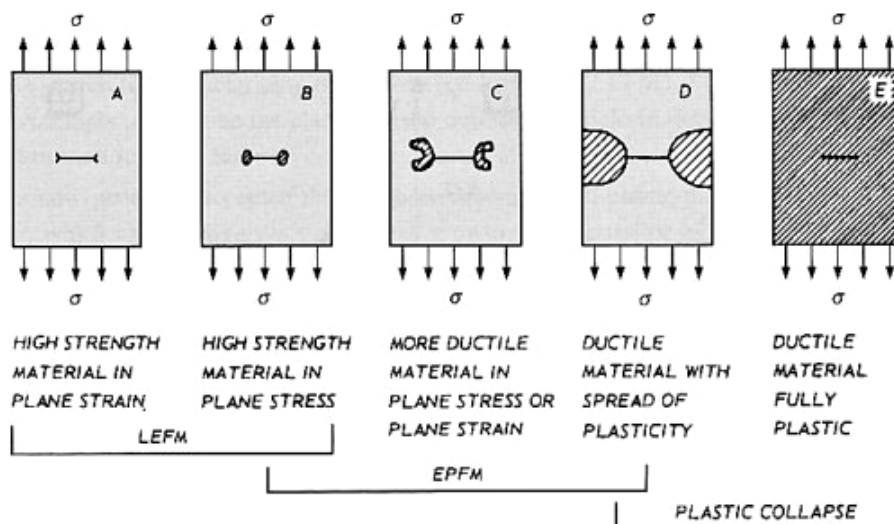




Schema per verificare la possibilità di definire K e per prevedere i risultati della prova di tenacità.

Sviluppo della EPFM: tutte quelle strutture che presentano grossi spessori (*high constraint*): Power generation, chemical processing industries, high pressure parts, thick walled vessels and pipes, offshore industry, thick sectioned welded structures.

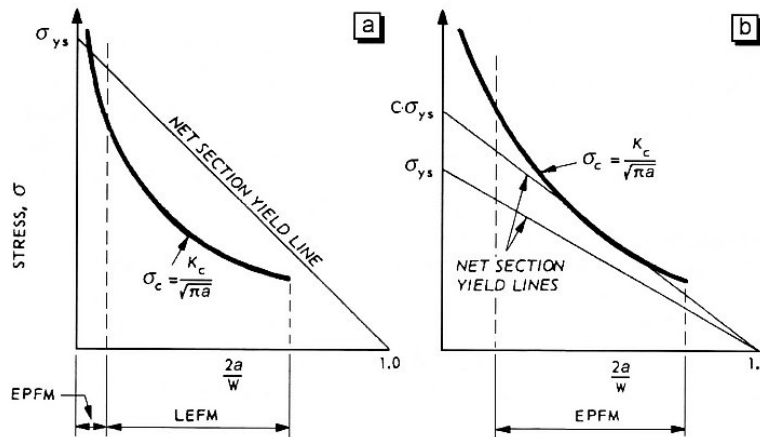
La MFLE è invece di primaria importanza nell'industria Aerospaziale, dove il lightweight design paga molto, e si utilizzano molti metalli e leghe ad alta resistenza, relativamente fragili.



Nello schema di sopra si delimitano i campi di applicazione delle diverse teorie di danneggiamento: a frattura mediante la MFLE, a frattura mediante la MFRP, e per collasso plastico.

E' utile osservare che la MFEP estende il suo campo di applicazioni a casi in cui l'applicazione della MFLE diventa limite (ad esempio quei casi in cui la zona plastica che si sviluppa all'apice della cricca è piuttosto ampia e devono apportarsi le correzioni di Irwin o Dugdale per la dimensione della cricca).

LA MFEP può altresì essere ancora impiegata in condizioni particolari nel campo di dominio del collasso di tipo plastico. Tale possibilità è illustrata nella slide seguente.



Schematic residual strength diagrams for (a) relatively brittle and (b) relatively ductile materials.

I due diagrammi di Feddersen riportati sopra, riferiti quindi a piastre con cricche centrate passanti, forniscono una descrizione delle condizioni di applicabilità delle diverse teorie di collasso.

In particolare il diagramma di sinistra è relativo ad un materiale con comportamento relativamente fragile. In questo caso la MFLE si applica per un ampio range di valori di $2a/W$, per i quali la previsione di resistenza residua a frattura è ben al di sotto della previsione di snervamento generalizzato della sezione resistente. In queste condizioni la MFEP va applicata solamente quando la curva di resistenza residua è prossima a quella di snervamento generalizzato, ovvero per valori di lunghezza di cricca molto piccoli o molto elevati.

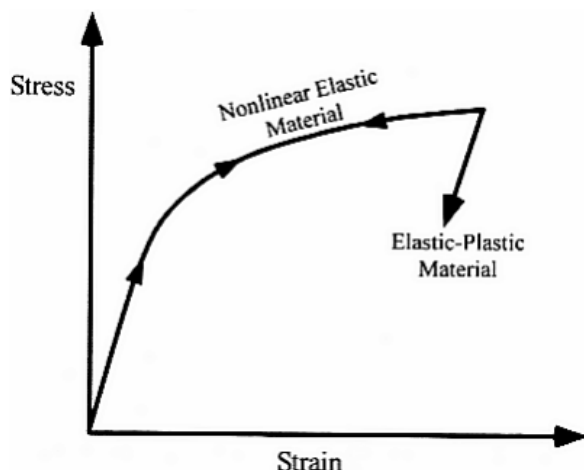
Il diagramma di destra è invece relativo ad un materiale relativamente duttile. Si nota che in questo caso l'abbassamento del valore della tensione di snervamento spesso determina come unica curva di resistenza residua la retta di snervamento generalizzato della sezione resistente. Nel caso di strutture in materiale duttile e di forte spessore, il vincolo plastico determinato dallo spessore può esser tale da determinare in prossimità dell'apice della cricca uno stato di SPD. In questo caso quindi le condizioni di snervamento si raggiungono per valori di tensione lungo y maggiori rispetto al valore di snervamento (si consideri ad esempio il fattore di vincolo plastico $C=3$). Quindi la retta di snervamento generalizzato si innalza e può di nuovo sovrapporsi alla curva di resistenza alla frattura. Per quei valori di $2a/W$ in cui ciò succede diventa di nuovo possibile poter descrivere le condizioni di frattura mediante la MFEP.

9/40

Intorno al 1968 Rice introdusse il parametro J come un integrale di linea, eseguito lungo un percorso generico attorno alla cricca, di un funzionale che coinvolge diversi parametri di campo dello stato di tensione e deformazione della struttura.

Tale parametro J rappresenta da un punto di vista energetico sempre la variazione di energia potenziale che la struttura subisce per effetto di un avanzamento infinitesimo del difetto (analogamente quindi al tasso di rilascio energetico G definito nella MFLE).

La novità consiste nel considerare adesso comportamenti del materiale più generici, ed in particolare di tipo elastico non-lineare per i quali il J si comporta come un parametro della frattura (tasso di rilascio energetico non-lineare, ovvero *non-linear energy release rate*).



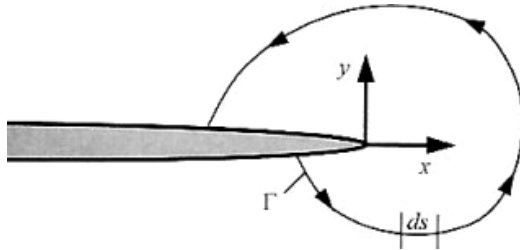
Se si assume un comportamento elastico non-lineare di un materiale, quando si considera una crescita di carico monotona, tale comportamento è esattamente uguale a quello di un materiale di tipo elasto-plastico.

La differenza di comportamento elasto-plastico con elastico non-lineare è data dalla natura non reversibile del primo, ed è messa in luce solo quando il carico non è più monotono crescente ma variabile (es. ciclico). Infatti quando si scarica il materiale, il comportamento elasto-plastico prevede uno scarico elastico lineare secondo un percorso diverso che porta alla nascita di deformazioni plastiche permanenti. In fase di scarico il comportamento elastico non-lineare invece percorre all'inverso esattamente lo stesso percorso seguito in fase di carico.

Soltanto nel caso elastico non-lineare si continua quindi ad avere una relazione biunivoca tra tensioni e deformazioni.

L'approccio di Rice nel valutare comportamenti elasto-plastici fu quello di considerarli equivalenti a comportamenti elastico-non-lineari, accettando la condizione di carico monotono al fine di poter rendere valida l'assunzione.

10/40



$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

Densità di energia di deformazione per un incremento infinitesimo di deformazione:

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Densità di energia di deformazione per deformazione totale:

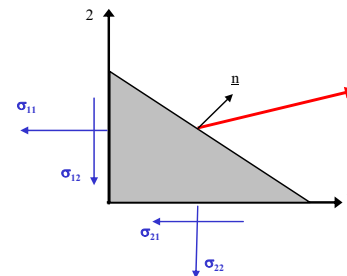
$$W = W(\epsilon_{kl}) = \int_0^{\epsilon_{kl}} dW = \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Forza agente su una areola di area infinitesima (*Traction vector*):

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \Rightarrow \begin{bmatrix} T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{12} \cdot n_2 \\ \sigma_{21} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 \end{bmatrix}$$

Vedi anche slide 12 lez. 4:

$$\bar{U}_i = \int_0^{\epsilon} \delta \bar{U}_i = \int_0^{\epsilon} \sigma \delta \epsilon$$



11/40

Energia potenziale del sistema: struttura difettata + sistema di carico (vedi slide 6 lez. 20):

$$J = - \frac{dU_p}{da} = \frac{d}{da} (F - U_d) \quad U_p = U_o + U_d - F$$

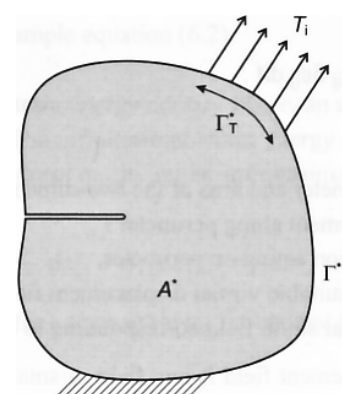
L'energia potenziale complessiva del sistema, U_p , si può anche scrivere come:

$$U_p = \int_{A^*} W dA - \int_{\Gamma_T^*} T_i u_i ds$$

Variazione dell'energia potenziale a causa della crescita della cricca:

$$\Delta U_p = \int_{A^*} \Delta W dA - \int_{\Gamma_T^*} T_i \Delta u_i ds = \int_{A^*} \Delta W dA - \int_{\Gamma^*} T_i \Delta u_i ds$$

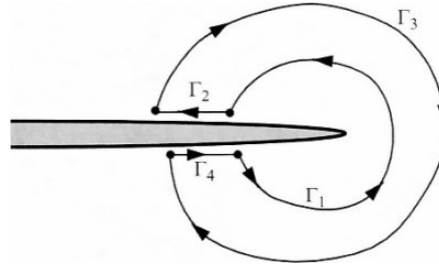
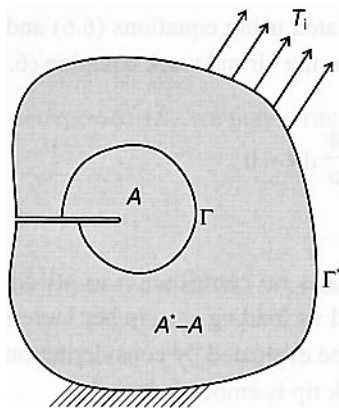
Si noti che tra la configurazione iniziale e quella finale (con la cricca avanzata) si assume che i carichi lungo il tratto di Γ^* caricato da forze esterne, non cambiano. L'integrale del lavoro delle forze esterne può essere esteso a tutto il contorno.



$$- \frac{dU_p}{da} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} - \frac{\Delta U_p}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} - \frac{1}{\Delta a} \left(\int_{A^*} \Delta W dA - \int_{\Gamma^*} T_i \Delta u_i ds \right)$$

12/40

La variazione di energia potenziale dell'area A^*-A (ove A è una area generica all'interno della struttura che circonda e quindi include l'apice della cricca e Γ^o è il contorno dell'area A^*-A) si può scrivere come:



$$\left(-\frac{dU_p}{da} \right)_{A^*-A} = \int_{\Gamma^o} T_i \frac{du_i}{da} ds - \int_{A^*-A} \frac{dW}{da} dA$$

Principio dei lavori virtuali (caso bidimensionale in assenza di forze di massa):

$$\int_{\Gamma} T_i \delta u_i ds = \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dA = \int_A \delta W dA$$

Una struttura elastica è in equilibrio sotto un dato sistema di carichi se per qualsiasi spostamento virtuale δu a partire da una configurazione compatibile u il lavoro virtuale è uguale all'energia di deformazione virtuale.

13/40

Se si applica il principio dei lavori virtuali al caso di sopra, considerando come campo di spostamenti virtuali cinematicamente ammissibili quello derivante da un avanzamento della cricca (si noti che ciò è possibile perché l'apice della cricca non si trova all'interno dell'area A^*-A , e lo spostamento all'apice della cricca, essendo singolare, non è cinematicamente ammissibile), si ha:

$$\int_{\Gamma^o} T_i \frac{du_i}{da} ds - \int_{A^*-A} \frac{dW}{da} dA = 0$$

Per cui la variazione di energia potenziale per incremento infinitesimo di cricca può essere valutata considerando un'areola del corpo, A , di dimensioni finite ma arbitrarie, all'interno del quale si trova l'apice della cricca:

$$J = -\frac{dU_p}{da} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta a} \left(\int_{\Gamma} T_i \Delta u_i ds - \int_A \Delta W dA \right)$$

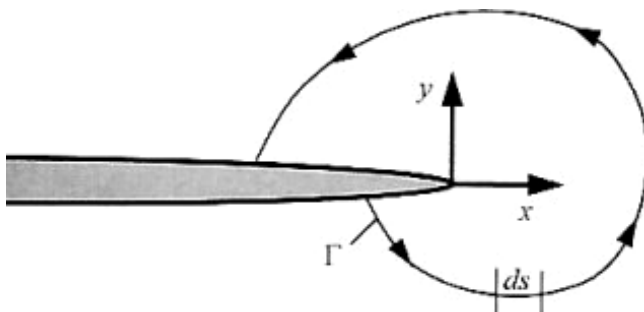
I passaggi precedenti dimostrano anche che la variazione di energia potenziale per incremento infinitesimo di cricca è nulla in un dominio chiuso, di forma arbitraria, al cui interno non è compreso l'apice della cricca.

14/40

Considerando un sistema di riferimento mobile che si muova insieme alla cricca e che abbia origine proprio sull'apice della cricca (orientato secondo la giacitura della cricca), si trova che l'espressione precedente si trasforma in un unico integrale di linea indipendente dal percorso del contorno (curva Γ).

L'espressione del J-Integral che si ottiene è la seguente:

$$J = -\frac{dU_p}{da} = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$



Nella valutazione del J-Integral l'apice della cricca deve essere compreso all'interno del dominio delimitato dal contorno Γ , e l'integrale di linea si calcola seguendo il contorno in senso antiorario, partendo quindi su un punto del fianco inferiore scarico della cricca e terminando su un punto scarico del fianco superiore della cricca, dopo aver percorso un tracciato arbitrario attorno all'apice della cricca.

L'integrale di contorno J rappresenta quindi il tasso di rilascio di energia per un materiale elastico lineare o non-lineare in condizioni di carico quasi-statiche.

15/40

Ricordando che l'integrale J calcolato su un percorso chiuso qualsiasi che non comprende l'apice della cricca è sempre nullo, un modo alternativo di dimostrare l'indipendenza dell'Integrale J dal percorso di integrazione, è indicato di seguito:

$$\oint \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = 0$$

$$\int_{ABC} + \int_{CD} + \int_{DEF} + \int_{FA} = 0$$

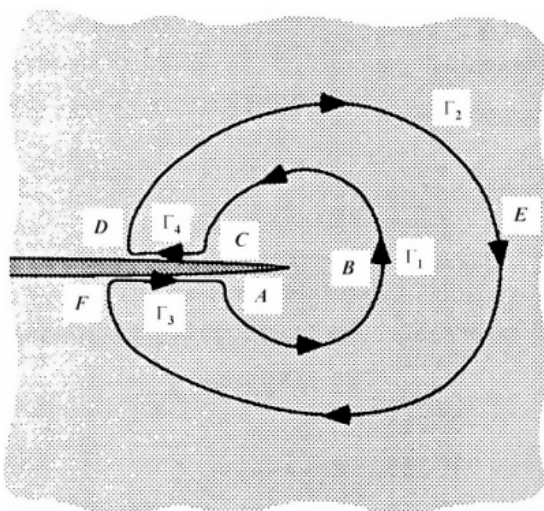
Lungo i tratti CD e FA, tracciati lungo i fianchi superiore ed inferiore della cricca, si ha $dy=0$ e $T_i=0$ (i fianchi della cricca sono scarichi), per cui si ha:

$$\int_{CD} = \int_{FA} = 0 \rightarrow \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} = - \int_{\Gamma_2}$$

Se entrambe i contorni Γ_1 e Γ_2 sono percorsi in verso antiorario, allora gli integrali di contorno sono uguali, dimostrando appunto l'indipendenza di J dal percorso di integrazione.

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$$

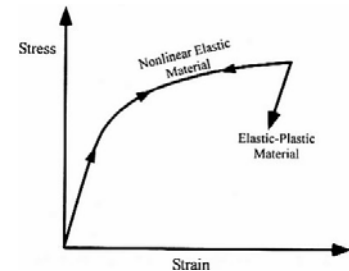


16/40

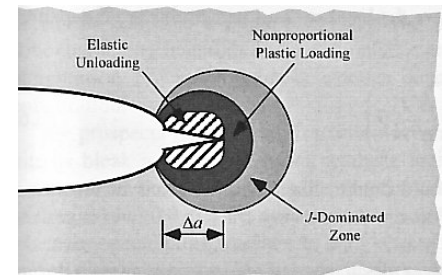
- In analogia con il tasso di rilascio energetico per materiali elastico lineari G , anche per il parametro J si può ipotizzare l'esistenza di un valore critico J_c , caratteristico del materiale, al quale la cricca inizia a propagarsi.

$$J \leq J_c$$

- L'energia in un materiale che si comporta in modo elasto-plastico è dissipata in calore quando il materiale si scarica dopo essersi deformato plasticamente. Tale energia viene quindi persa e non trasformata in altre forme di energia. In queste condizioni non è lecito parlare di energia di deformazione ed energia potenziale nei termini di bilancio energetico visti in precedenza per definire il parametro J-Integral.



- Quando la cricca si propaga, in realtà il materiale prossimo all'apice della cricca che viene a formare i nuovi fianchi della cricca estesa si scarica. Spesso tale materiale che prima costituiva l'apice della cricca aveva tensioni prossime o superiori ai valori di snervamento (si ricordi ad esempio il $3\sigma_{ys}$ determinato dal fattore di vincolo plastico in SPD). Per cui si ha uno scarico in condizioni in cui il materiale è in campo plastico. A causa di ciò, in generale il parametro J è quindi adatto a descrivere solo le condizioni di incipiente propagazione di un difetto. Mediante il parametro J non è cioè possibile seguire la crescita della cricca a meno di particolari condizioni che saranno definite nel seguito (si veda propagazione della cricca controllata dal parametro J).

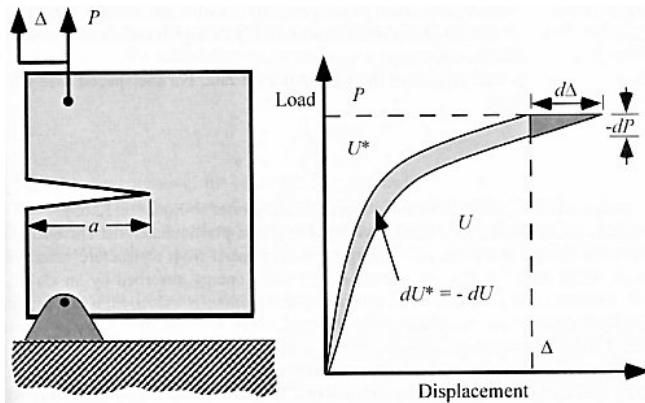


17/40

- Il parametro J è un parametro di campo definito per problemi bidimensionali, ovvero considerando lo stato di tensione e deformazione sul piano. Per semplicità la variazione delle componenti di tensione o deformazione lungo lo spessore non è presa in considerazione. In prima analisi quindi J non è un parametro idoneo a rappresentare situazioni variabili lungo lo spessore della cricca, come ad esempio situazioni di transizione da SPT ad SPD.
- Per definizione, il parametro J , nel caso di comportamento elastico lineare del materiale, coincide con G . Quindi il parametro J è compatibile con l'analisi MFLE, ed inoltre J ha le stesse dimensioni di G (ovvero [Joule/m²] oppure [N/m]).
- Trovare delle espressioni di J è in genere molto difficile, e di solito si procede impiegando metodi numerici (in particolare tecniche agli elementi finiti) o sperimentali (mediante le definizioni energetiche di J e facendo uso delle curve carico-spostamento, come si vedrà nel seguito). Esistono alcune configurazioni semplici per le quali è stato possibile derivare espressioni di J , e che vengono usate come provini per determinazioni sperimentali del valore critico J_c .

18/40

Definizioni alternative del parametro J possono essere ottenute richiamando il significato energetico dello stesso parametro J.



$$U_p = U_o + U_d - F$$

$$J = -\frac{dU_p}{da} = \frac{d}{da}(F - U_d)$$

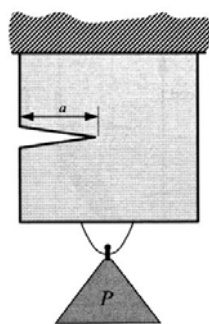
In generale si ha:

$$U_d = \int_0^P P d\Delta; \quad F = P \cdot \Delta$$

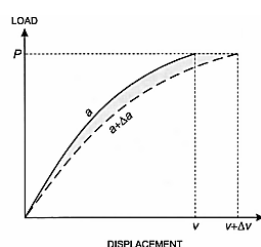
Nel caso di comportamento elastico lineare: $U = \frac{P \cdot \Delta}{2} = U^*$

$$G = \left(-\frac{dU_d}{da} \right)_P = \frac{1}{2} P \frac{dv}{da} = \left(-\frac{dU_d}{da} \right)_v = -\frac{1}{2} v \frac{dP}{da}$$

19/40



Constant Load

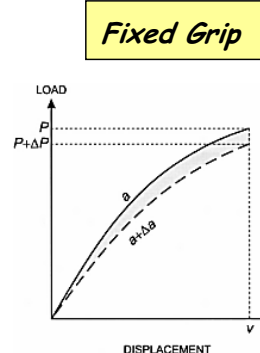


$$\Delta F = P \Delta v; \quad \Delta U_d = \int_0^{v+\Delta v} P_{a+\Delta a} dv - \int_0^v P_a dv$$

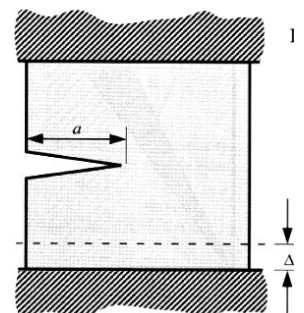
$$\Delta U_p = \int_0^{v+\Delta v} P_{a+\Delta a} dv - \left(\int_0^v P_a dv + P \Delta v \right) = -(\text{area in grigio})$$

$$\Delta U_p = - \left(\int_0^P v_{a+\Delta a} dP - \int_0^P v_a dP \right) = - \int_0^P \Delta v dP$$

$$J = -\frac{dU_p}{da} = \int_0^P \left(\frac{dv}{da} \right)_P dP$$



Fixed Grip



$$\Delta F = 0; \quad \Delta U_d = \int_0^v P_{a+\Delta a} dv - \int_0^v P_a dv = \int_0^v \Delta P dv$$

$$\Delta U_p = \Delta U_d - \Delta F = \int_0^v \Delta P dv = -(\text{area in grigio})$$

$$J = -\frac{dU_p}{da} = - \int_0^v \left(\frac{dP}{da} \right)_v dv$$

Trascurando quindi effetti del secondo ordine (l'areola $dv dP$), il J-integral è lo stesso sia per trasformazioni in controllo di carico che a spostamento imposto:

$$J = \int_0^P \left(\frac{dv}{da} \right)_P dP = - \int_0^v \left(\frac{dP}{da} \right)_v dv$$

20/40

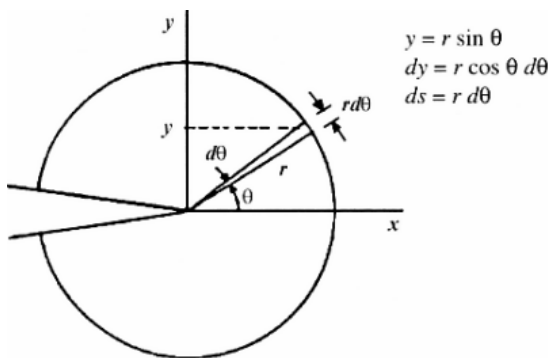
Come si è visto, quindi esiste una stretta analogia tra i due parametri G (tasso di rilascio energetico) e J . Tale analogia si rispecchia anche nell'esistenza di una relazione tra il parametro energetico e lo stato tensionale all'apice della cricca.

$$G = \frac{K_I^2}{E'}$$

Al fine di mostrare la natura del legame tra J e lo stato di tensione e deformazione all'apice della cricca, si consideri un materiale il cui comportamento non-lineare possa ad esempio essere rappresentato da un modello di incrudimento esponenziale quale quello di Ramberg-Osgood.

Inoltre data l'indipendenza del J-Integral dal percorso di integrazione, consideriamo un percorso circolare di raggio r , con centro sull'apice della cricca (vedi figura sotto). Sulla base di tale percorso l'espressione del J-Integral diventa:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \right) \cos \theta - T \frac{\partial u}{\partial x} \right] r d\theta$$



In base a considerazioni di tipo dimensionale possiamo porre:

$$\left(\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \right) = \alpha_1 \sigma' \varepsilon'; \quad \begin{cases} T = c_1 \sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \varepsilon' \end{cases} \rightarrow T \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \sigma' \varepsilon'$$

$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow$ funzioni adimensionali

$\sigma', \varepsilon' \rightarrow$ valori di riferimento di tensione e deformazione

21/40

Si noti che α_1 ed α_2 sono solo funzioni di θ in quanto J è indipendente dal percorso di integrazione. Per lo stesso motivo $\sigma' \varepsilon'$ saranno proporzionali ad $1/r$.

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha_1 \sigma' \varepsilon' \cos \theta - \alpha_2 \sigma' \varepsilon'] r d\theta = \sigma' \varepsilon' r \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha_1 \cos \theta - \alpha_2] d\theta = \sigma' \varepsilon' r Q$$

Dove Q è un numero dato da: $Q = \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha_1 \cos \theta - \alpha_2] d\theta$

Modello di Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{H} \right)^n \rightarrow \varepsilon' = \left(\frac{\sigma'}{H} \right)^n \rightarrow J = \frac{(\sigma')^{n+1}}{H^n} r Q \rightarrow \sigma' = \left(\frac{H^n J}{r Q} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Nel caso di comportamento elastico lineare i coefficienti del modello di Ramberg-Osgood diventano: $n=1$ ed $H=E$, da cui:

$$\sigma' = \frac{\sqrt{EJ}}{\sqrt{Q} \sqrt{r}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \rightarrow \begin{cases} K = \sqrt{EJ} \rightarrow J = K^2/E = G \\ \sqrt{Q} = \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

22/40

Hutchinson, Rice e Rosengren hanno in particolare ricavato relazioni delle tensioni e deformazioni in prossimità dell'apice della cricca, note come **HRR solutions**, basate anch'esse su un modello di incrudimento esponenziale (*power law hardening material*) del tipo ad esempio di Ramberg-Osgood, data da:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \rightarrow \sigma_0 = E \varepsilon_0 \quad \text{con } \sigma_0 \text{ tensione di snervamento}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + (\alpha \varepsilon_0) \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$$

HRR solutions:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$$

$$I_n, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$$

Sono in generale funzioni adimensionali dipendenti da n , θ e dallo stato di tensione (SPT o SPD). Si trovano in forma tabellare per alcuni casi.

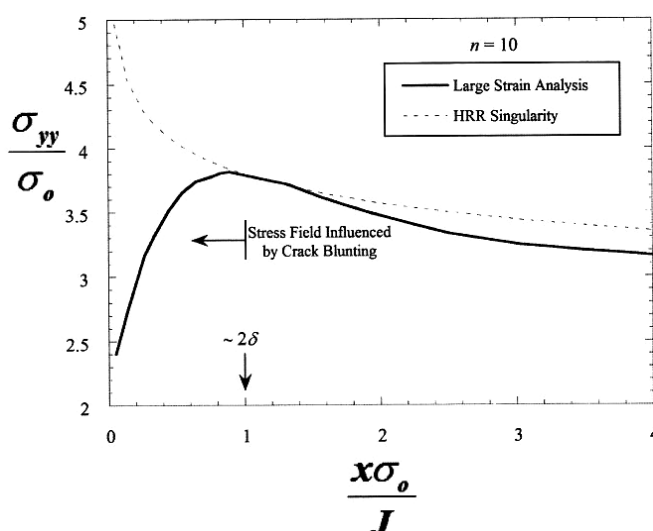
Le equazioni precedenti implicano che lo stato di tensione/deformazione nelle vicinanze dell'apice di una cricca sono caratterizzati da un singolo parametro J . Quindi strutture con diverse geometrie ma identico valore di J , avranno lo stesso stato di tensione/deformazione (similitudine del parametro J).

23/40

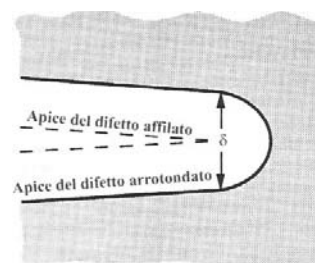
Le soluzioni HRR si possono anche scrivere nella seguente forma generale:

$$\sigma_{ij} = C_1 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}}; \quad \varepsilon_{ij} = C_2 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

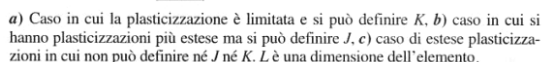
Le soluzioni sono ancora singolari in quanto per $r \rightarrow 0$, $\sigma, \varepsilon \rightarrow \infty$. Tuttavia mentre nel caso elastico lineare la singolarità aveva ordine 0.5 e ampiezza data da K , adesso la singolarità dipende da n e l'ampiezza della singolarità dipende da J .



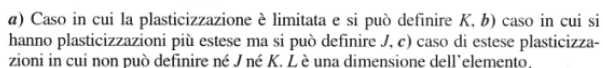
La curva a sinistra mostra l'andamento della tensione lungo y (normalizzata mediante il valore di tensione remota) secondo la previsione della soluzione HRR basata sulla MFEP, e secondo una soluzione determinata mediante elementi finiti, considerando nella zona prossima all'apice della cricca, ovvero la zona delle grandi deformazioni, definizioni non ingegneristiche del tensore delle deformazioni.



24/40



Infatti La zona in diretta prossimità dell'apice della cricca è caratterizzata dall'avere grandi deformazioni plastiche a seguito delle quali lo spigolo della cricca si arrotonda. A seguito di ciò gli sforzi che dovrebbero tendere ad infinito, non presentano più una singolarità, e neppure le soluzioni HRR sono idonee a descrivere in tali condizioni l'effettivo campo di sforzi. Il campo di grandi deformazioni è tale per cui neppure il comportamento elastico non lineare alla base della definizione di J è più idonea (zona di non proporzionalità in cui le componenti di deformazione non crescono in modo proporzionale).



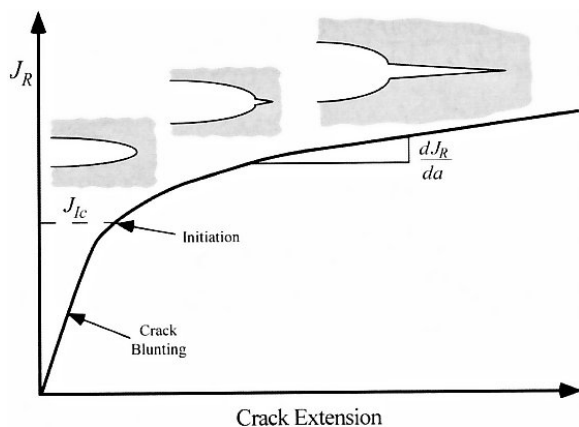
- Se il carico cresce in maniera monotonica e quasistatica, all'apice della cricca la zona plastica sarà sempre più estesa sino ad inglobare la zona dominata da K (e quindi dalla singolarità $r^{-0.5}$).
- In queste condizioni nella zona plastica vi sarà una subzona il cui stato tensionale è ben descritto dalle soluzioni HRR (*J-dominated zone*). Ciò è vero se le deformazioni in tale zona plastica non sono troppo elevate. L'ordine della singolarità del campo HRR sarà adesso del tipo $r^{-1/(n+1)}$. Il parametro J definisce in modo univoco le condizioni in prossimità dell'apice della cricca (così come faceva K nella k-dominated zone), e le condizioni di frattura sono definite univocamente dal parametro J e dal suo valore critico J_{Ic} . La capacità di J di definire completamente le condizioni all'apice della cricca persiste anche se in prossimità dell'apice vi è una *large strain zone* nella quale la soluzione HRR non vale. Infatti se la *large strain zone* è piccola (di solito si estende non oltre 2 volte il CTOD) e ben inglobata nella *J-dominated zone*, allora J descrive le condizioni anche all'interno della *large strain zone* (condizioni al contorno definite da J).
- AL crescere della *large strain zone* (*large scale yielding*) questa progressivamente raggiunge le dimensioni della *J-dominated zone*, e la frattura non è più controllata da un unico parametro J_{Ic} . In queste condizioni quindi non vi è più un singolo parametro di frattura (*single-parameter fracture mechanics*), ed i valori critici J_c hanno una dipendenza con le dimensioni e geometria del provino (analogamente a quanto accadeva a K_c).

Come detto il J-Integral prevede che il materiale si comporti in modo elastico non-lineare. Quando la cricca comincia a propagarsi in un materiale duttile, il materiale che costituisce i nuovi fianchi del tratto di avanzamento della cricca Δa , subisce uno scarico che non può essere di natura elastica-lineare. Per cui una certa parte di energia del sistema si trasforma in calore (l'area di isteresi data dall'area sottesa dalla curva elastica non lineare e la curva sottesa dallo scarico elastico lineare) ed il bilancio energetico su cui si basano i parametri della frattura (sia G che J) non è più corretto.

Nonostante la precedente osservazione, si osserva che è possibile valutare il parametro J al crescere della cricca, tracciando quindi delle curve $J-\Delta a$. Si osserva in particolare che tali curve sono di tipo crescente al crescere di Δa .

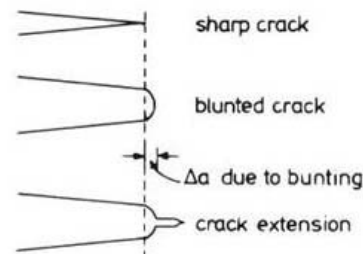
Tale comportamento lascia pensare all'esistenza di una curva di resistenza J_R , di significato analogo alla curva di resistenza R , il cui andamento crescente indica la tendenza della cricca ad avere un tratto più o meno ampio di crescita stabile. In effetti sperimentalmente si osserva nei materiali duttili la tendenza ad una crescita stabile della cricca per progressiva coalescenza di microvuoti che si formano in prossimità dell'apice della cricca (*tearing*). Alle volte tale crescita è anche piuttosto ripida per cui indicare con J_c il valore critico può spesso risultare in un criterio molto conservativo a seguito della notevole resistenza sviluppata dal materiale con il crescere della cricca.

Un esempio dell'andamento crescente della curva $J-\Delta a$ è dato di seguito.

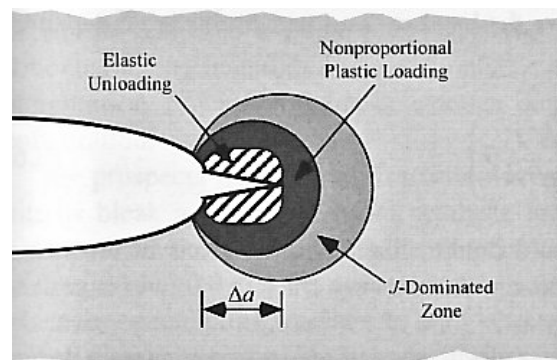
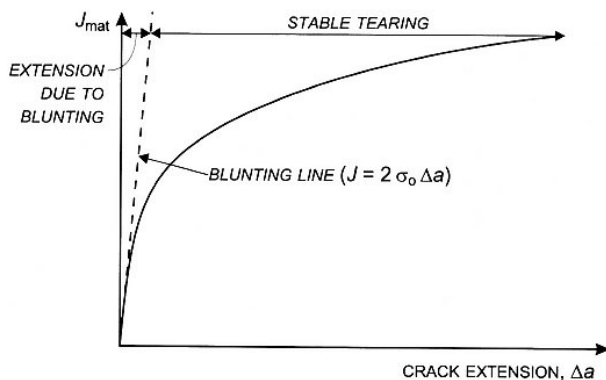


La curva $J-\Delta a$ ha un tratto iniziale non verticale (come nelle curve R) ma inclinato, sia pur con pendenza molto più elevata rispetto al tratto seguente l'inizio di crescita stabile, corrispondente al valore di J_{IC} .

Tale inclinazione iniziale è dovuta all'arrotondamento dell'apice della cricca a seguito delle elevate deformazioni (*blunting*).



27/40

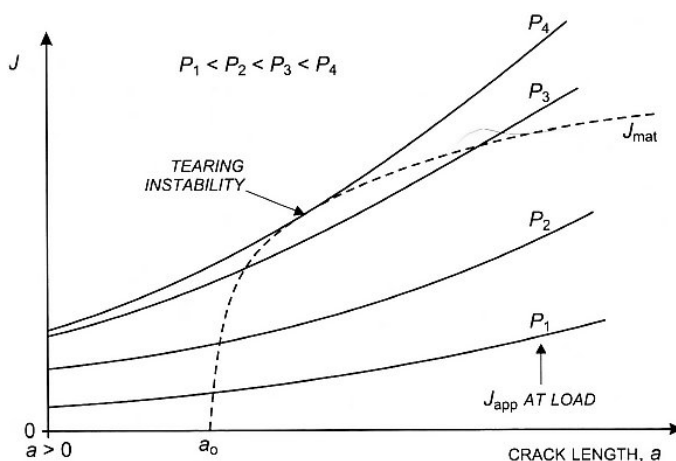


Nonostante la zona di scarico elastico che si forma quando la cricca cresce, è ancora possibile in certe circostanze utilizzare J come parametro di frattura. Tale uso del parametro J è anche indicato come *J-controlled crack growth*, mediante il quale è possibile sia valutare le condizioni di crescita stabile (*stable tearing*) che le condizioni di rottura duttile instabile (*ductile instability*).

Le condizioni per cui il parametro J può continuare ad essere usato per descrivere la crescita stabile della cricca, sono presenti quando la zona dominata da J ha un'estensione più ampia della zona che comprende sia lo scarico elastico che la zona di carichi plastici non proporzionali a J (process zone, dove in genere si formano i microvuoti ed il fenomeno del *blunting*). Queste due ultime zone infatti sono non compatibili con l'ipotesi di comportamento elastico non-lineare, ma se sono all'interno della zona dominata da J , e quindi se la cricca, nella sua crescita, si mantiene all'interno della zona dominata da J , allora si può concludere che la crescita della cricca è ancora essa stessa controllabile mediante l'unico parametro J .

Le condizioni di crescita controllata da J sono favorite da un limitato snervamento del materiale all'apice della cricca (*small scale yielding conditions*), favorito da un materiale non troppo duttile (quindi con tensione di snervamento non troppo bassa ed campo plastico non eccessivamente ampio) e da dimensioni della zona resistente della struttura (es. il legamento nei provini criccati) non troppo piccole rispetto alle dimensioni della cricca.

28/40



Si osserva, così come accadeva per le curve R , che le curve di resistenza J non dipendono dalla lunghezza iniziale della cricca.

La crescita instabile si verifica quando la *driving force curve* (dipendente da a , dal carico e dalle modalità di applicazione del carico) è tangente alla curva di resistenza J .

Indicando con J_{app} il valore di J applicato dalle forze esterne, ovvero la driving force, e con J_{mat} la curva di resistenza del materiale ovvero l'evolvere del J critico con il crescere della cricca, il criterio di crescita instabile si scrive come:

$$J_{app}(P, a) = J_{mat}(\Delta a)$$

$$\frac{\partial J_{app}}{\partial a} > \frac{dJ_{mat}}{da}$$

In conclusione, in condizioni di *small scale yielding* un singolo parametro di frattura, che sia K o J o $CTOD$, può sempre caratterizzare univocamente le condizioni all'apice della cricca e la sua crescita stabile ed instabile. Tale parametro risulta inoltre indipendente dalla geometria e dimensioni della struttura o provino, e quindi è un valore tipico del materiale.

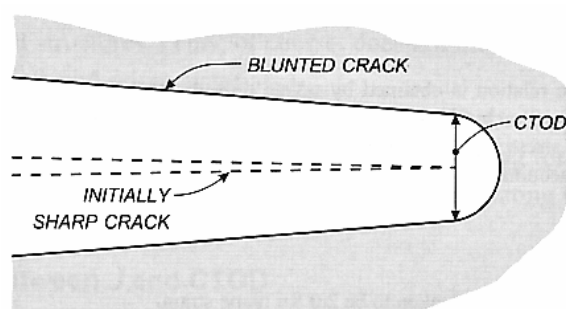
29/40

Il Metodo del COD: *Crack Opening Displacement*

Un altro approccio per lo studio delle condizioni che determinano la frattura di una struttura in presenza di una cricca, valido in condizioni di estesa plasticizzazione della zona attorno all'apice del difetto, è il COD o *Crack Opening Displacement approach*, proposto per la prima volta da Wells nel 1961 e sviluppatosi soprattutto in UK sotto un grosso influsso del TWI (The Welding Institute), che lo propose per lo studio della frattura di strutture saldate.

Il metodo del COD è per lungo tempo stato applicato e sviluppato in UK parallelamente al concetto del J -Integral che fu invece sviluppato e trovò maggiori seguiti negli USA, fino ai primi anni 80, quando alcuni ricercatori mostrarono come i due metodi fossero tra loro legati.

Il ragionamento parzialmente corretto che condusse Wells a formulare il criterio del COD è il seguente: all'apice di una cricca la soluzione elastica prevede sempre un campo di tensione singolare per cui $\sigma \rightarrow \infty$. In queste condizioni sicuramente la zona vicina all'apice della cricca raggiungerà le condizioni di plasticizzazione dato che un materiale non può resistere a tensioni infinite. La presenza di tensioni così elevate fa osservare a Wells che la rottura, ovvero la crescita del difetto, non è in realtà governata dalle tensioni (se così fosse la singolarità dello stato tensionale è tale da far propagare la cricca anche per carichi minimi), bensì dalle deformazioni. Wells ipotizzò che la cricca si propagasse quando le deformazioni plastiche all'apice della cricca superavano certi valori limite probabilmente dipendenti dalla natura del materiale.

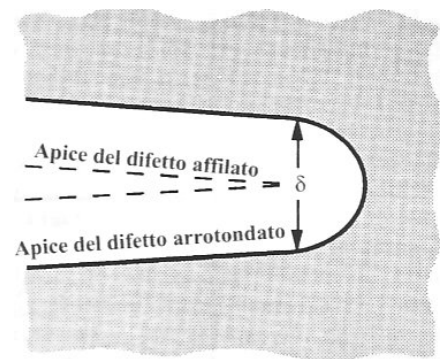


Le elevate deformazioni plastiche che nascono nella zona plastica all'apice della cricca sono tali da far allontanare tra di loro i fianchi della cricca ed arrotondare l'apice della cricca stessa (*crack blunting*), cioè il raggio di curvatura all'apice della cricca diventa più grande.

30/40

Il **COD** o **Crack Opening Displacement**, indica quindi di quanto i fianchi della cricca si allontanano tra di loro in corrispondenza di una coordinata generica x all'interno della cricca, per effetto della deformazione plastica. Il COD è spesso indicato anche con δ .

Il **CTOD** o **Crack Tip Opening Displacement**, indica di quanto i fianchi della cricca si allontanano tra di loro per effetto della deformazione plastica in corrispondenza del punto dove teoricamente dovrebbe trovarsi l'apice della cricca ideale, della cricca cioè che non si è spuntata e che continua ad avere raggio di curvatura teorico nullo all'apice. In teoria quindi, un materiale puramente elastico dovrebbe avere un CTOD nullo.

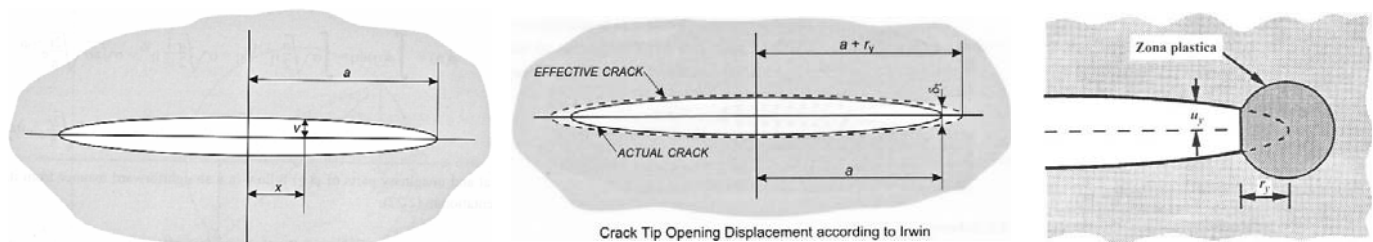


Il criterio del COD formulato da Wells quindi considera che il valore del CTOD al momento di incipiente crescita della cricca, è un valore critico tipico del materiale, per cui si può formulare un criterio di frattura in base al quale una cricca in una struttura si propaga se $CTOD = CTOD_{crit}$ (il CTOD è spesso indicato anche con δ_t e δ_{tc} è il valore critico).

31/40

Si è detto che nelle ipotesi della MFLE il CTOD è nullo. Se tuttavia si considerano gli studi di Irwin e Dugdale sulla genesi ed effetto della zona plastica all'apice della cricca, è possibile impiegare i concetti introdotti da tali autori per ottenere una previsione analitica del valore del CTOD per condizioni in cui è applicabile la MFLE.

Nella lezione 15 (slide 11) si è visto come derivare il valore dello spostamento dei fianchi della cricca nella direzione y per il caso di una cricca centrata in una piastra di dimensioni infinite (ovviamente secondo la MFLE). Valori diversi di spostamento si sono in particolare ottenuti a seconda se vi sia SPT o SPD.



$$\text{SPT} \quad 2v = 4 \frac{\sigma}{E} \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad (a_{eff})_{Irwin} = 2(a + r_y)$$

$$\delta_t = 4 \frac{\sigma}{E} \sqrt{(a^2 + 2ar_y + r_y^2 - a^2)} \approx \frac{4\sigma}{E} \sqrt{2ar_y}$$

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

$$(\delta_t)_{Irwin} = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E \sigma_{ys}}$$

32/40



E' possibile ottenere anche una espressione più generale utilizzando l'approccio di Dugdale per descrivere la lunghezza effettiva della cricca a seguito della correzione della zona plastica.

In particolare, sempre per il caso di piastra infinita con cricca centrata passante, per SPT e per materiale elastico perfettamente plastico, si ricava la seguente relazione:

$$(\delta_t)_{Dugdale} = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \ln \left(\sec \frac{\pi a}{2\sigma_{ys}} \right)$$

La relazione precedente, nel caso della MFLE, può semplificarsi e scriversi in funzione di K_I , divenendo:

$$(\delta_t)_{Dugdale} = \frac{K_I^2}{E\sigma_{ys}}$$

Valore molto prossimo a quello ricavato mediante la correzione plastica di Irwin.

Le relazioni precedenti sono molto importanti in quanto mettono in luce il legame tra δ_t e K_I e quindi dimostrando la compatibilità tra l'approccio del COD e la MFLE.

Tuttavia l'approccio del COD ha una validità più generale della MFLE, in quanto esso continua a potersi applicare quando all'apice della cricca si forma una vistosa zona plastica.

Il principale problema dell'approccio è che non è semplice trovare relazioni analitiche per il COD per data geometria e condizioni di carico. Spesso quindi il CTOD è usato solo come parametro di confronto della tenacità tra diversi materiali, e non essendo disponibile una relazione analitica che lo legghi ai parametri della struttura, non è immediato ricavare ad esempio la lunghezza critica di cricca.

33/40



Diversi autori dalla fine degli anni settanta hanno dimostrato l'esistenza di un legame tra il CTOD e J. Le relazioni che esprimono tale legame sono tutte del tipo:

$$J = M\sigma_{ys}\delta_t$$

Dove M è un coefficiente numerico che si trova essere in genere compreso tra 1.15 e 2.95 (diversi valori sperimentali di M sono anche stati ricavati con $M \approx 2$).

Si noti che in campo elastico lineare, considerando il valore di δ_t secondo l'approccio che utilizza il modello di Dugdale, si ha:

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{E\sigma_{ys}} = \frac{G}{\sigma_{ys}} \rightarrow G = J = \delta_t\sigma_{ys}$$

Questa è un'ulteriore conferma dell'equivalenza in campo elastico lineare tra J e G.

34/40

Come visto nelle precedenti lezioni, nella MFEP si definiscono due parametri di frattura: J_e e CTOD, il cui impiego è per molti aspetti analogo agli equivalenti parametri di frattura della MFLE (K e G).

Dall'impiego di J e CTOD quali parametri di similitudine, e quindi in grado di determinare in modo univoco lo stato di sollecitazione che governa la crescita o meno della cricca, discende la possibilità di definire i valori critici di J e CTOD, vale a dire J_c e $CTOD_c$ o δ_{tc} , come proprietà di un materiale. Il J_c ed il δ_{tc} , quindi, entro certe opportune ipotesi, non dipendono dalla geometria e dalle dimensioni della struttura criccata.

Esistono diversi procedimenti sperimentali per caratterizzare un materiale in termini di J_c e $CTOD_c$ e per valutare J e CTOD per una data geometria. Solo alcuni di questi procedimenti sono confluiti in uno standard vero e proprio da parte in particolare degli enti normalizzanti soliti: ASTM, ISO e BS.

Procedimenti non standardizzati:

- Determinazione di J_c mediante il metodo di Begley e Landes;

Procedimenti standardizzati:

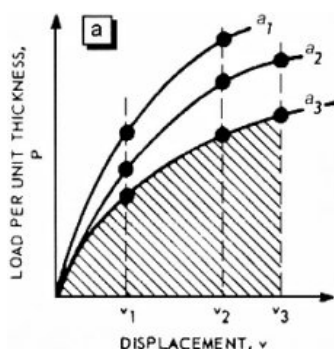
- ASTM E 813-81 (1981). Standard Test Method for J_{Ic} , A Measurement of Fracture Toughness.
- ASTM E 1820-01 (2001). Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness.
- BS 7448 (1991): Fracture Mechanics Toughness Tests, Part 1, Method for Determination of K_{Ic} , Critical CTOD and Critical J Values of Metallic Materials.

35/40

Il metodo di Begley e Landes si basa sulla determinazione di J e J_c mediante la definizione di J-Integral come variazione dell'energia potenziale per avanzamento infinitesimo della cricca. Il metodo procede mediante una valutazione grafica, impiegando i dati delle curve carico-spostamento misurate su provini criccati con dimensioni iniziali della cricca diverse.

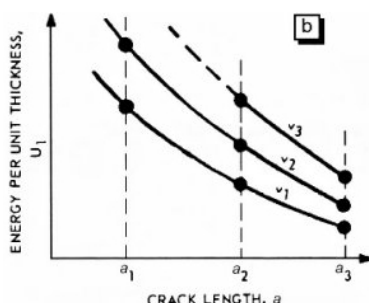
$$J = - \left(\frac{dU_p}{da} \right)$$

Di seguito si descrivono i passi della procedura:



Passo (a):

Si determina l'area sottesa dalla curva carico-spostamento per ogni provino con lunghezza di cricca a_i . Tale area U_i rappresenta l'energia di deformazione ricevuta dal provino (vedi teorema di Clapeyron). La curva si traccia sino all'instaurarsi (*onset*) della propagazione della cricca.

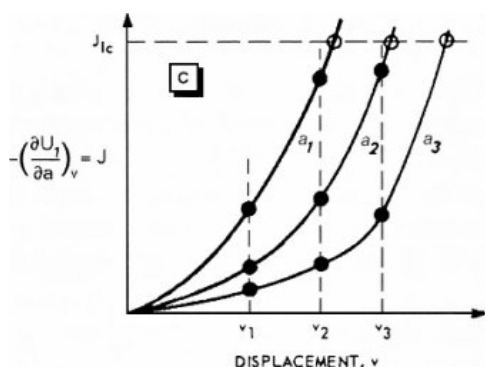


Passo (b):

Si costruisce la curva U_i - a per diversi valori di spostamento v .

Ognuna di tali curve descrive la variazione di energia di deformazione per dato spostamento imposto v_i .

36/40



Passo (c):

I valori cambiati di segno delle derivate di U_i rispetto ad a per valori di v costante sono calcolati:

$$J = -\left(\frac{\partial U_i}{\partial a}\right)_v = -\left(\frac{\partial U_d}{\partial a}\right)_v = -\frac{dU_p}{da} = \frac{d}{da}(F - U_d)$$

Poiché la variazione di energia U_i , pari all'energia di deformazione U_d , è valutata per spostamenti imposti, in tali condizioni la forza esterna F non compie lavoro, per cui $-(\partial U_i / \partial a)_v$ è proprio pari all'integrale J .

SI possono quindi tracciare le curve $J-v$ per le diverse lunghezze di cricca e determinare J_c come il valore corrispondente lo spostamento v che porta all'avanzamento della cricca in ogni provino. Tale valore di J_c deve essere lo stesso per tutti I provini con diverse lunghezze iniziali di cricca se J è effettivamente un parametro di similitudine.

Due sono i principali punti deboli dell'approccio di Begley e Landes:

- > L'individuazione del punto di spostamento critico (al quale la cricca inizia a propagare) è spesso difficile. Spesso la cricca inizia a propagarsi stabilmente (crescita lenta duttile della cricca) e l'inizio della propagazione avviene di solito all'interno dello spessore (*crack tunnelling*) per cui potrebbe essere non direttamente visibile;
- > Sono necessari molti provini con diverse lunghezze di cricca iniziali per poter costruire le diverse curve con necessaria accuratezza.

Per I motivi detti sopra si preferiscono I metodi che fanno uso di un solo provino. Tali metodi sono quelli implementati negli standard ASTM.

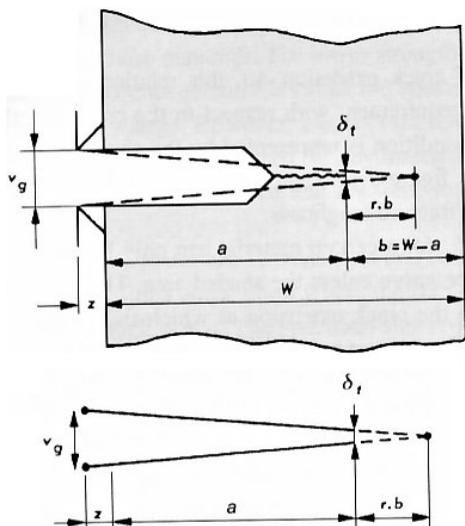
37/40

Per la misura sperimentale del COD e del CTOD secondo lo standard BS 7448, si utilizzano sia provini SENB che CT, di spessore uguale o prossimo a quello della struttura in servizio.

Una misura diretta del CTOD è piuttosto difficile se non impossibile. Quindi il valore di CTOD e CTOD critico (cioè al momento del primo avanzamento, di solito di tipo stabile, della cricca), vengono derivati dalla misura del COD, ovvero dello spostamento dei fianchi della cricca, misurato non all'apice bensì in prossimità della superficie esterna.

Si assume in particolare che il comportamento deformativo del provino sia equivalente all'effetto della presenza di una cerniera plastica (*plastic hinge*) ad una certa ascissa del legamento. Se il legamento quindi è lungo b , la cerniera plastica si suppone ad una distanza $r \cdot b$ dall'apice della cricca, all'interno del legamento. Il valore di r è dato dalla norma per i diversi provini consigliati.

Ipotizzando quindi che il materiale, nella sua fase di deformazione plastica, ruoti attorno alla cerniera plastica, dalla misura del COD, indicata con v , si ricava la componente plastica di CTOD, indicata con δ_t .

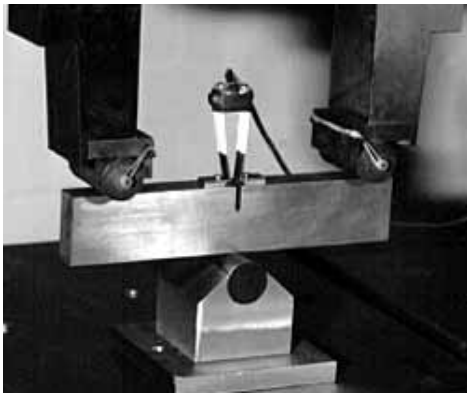


$$(\delta_t)_{pl} = \frac{r \cdot b}{r \cdot b + a + z} \cdot v_{pl} \quad (\delta_t)_{el} = \frac{K_I^2}{2\sigma_{ys}} \cdot \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)$$

La componente dovuta alla deformazione elastica del CTOD si ricava mediante una formula indicata dalla norma, basata sulla previsione del CTOD secondo la teoria della zona plastica di Dugdale (la formula è modificata per il caso di SPD e adottando un fattore di vincolo plastico pari a 2). Tale formula prevede la determinazione del K_{Ic} .

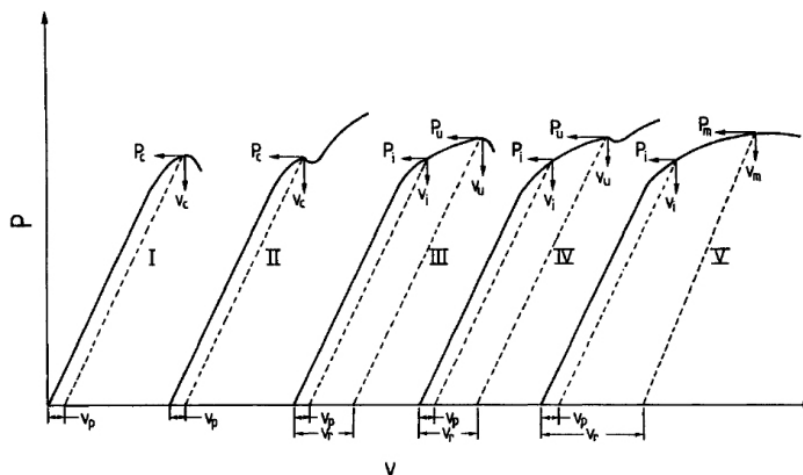
$$\delta_t = (\delta_t)_{el} + (\delta_t)_{pl}$$

38/40



Per la valutazione del CTOD critico, ovvero δ_{Ic} , si deve definire nella curva carico-spostamento (ove lo spostamento è qui inteso quello che misura il COD, ad esempio mediante un *clip gauge*) il punto critico.

Tale individuazione è immediata solo quando il comportamento del materiale è molto fragile (crescita lineare seguita da propagazione instabile). Ci possono essere diverse altre circostanze in cui la definizione del punto critico non è altrettanto immediata per la presenza di crescita instabile seguita da arresto (pop-in vedi figura in basso caso II e IV), o perché vi è una consistente crescita stabile della cricca, indicata da un marcato andamento non lineare della curva di carico. Per i diversi casi che possono presentarsi la norma BS prescrive quali valori di spostamento e carico utilizzare per il calcolo del CTOD critico.



A seconda del tipo di comportamento quando la cricca raggiunge le condizioni di propagazione si definiscono diversi valori di CTOD critico:

δ_{Ic} - quando si ha crescita instabile o pop-in e arresto sin dall'inizio prima di osservare alcuna crescita stabile (casi I e II);

δ_u - al momento di crescita instabile o pop-in, quando si ha crescita stabile iniziale della cricca (casi III e IV);

δ_i - al momento di inizio della crescita stabile (casi III e IV e V);

δ_m - al punto di carico massimo P_m quando questo è preceduto e seguito da crescita stabile (caso V).

39/40

EXTRA PANTS...



THREE SHIRTS,
TWO SWEATERS,
TWO SWEATSHIRTS...



ANOTHER PAIR
OF PANTS...



Fonte: Bill Watterson, "Calvin and Hobbes - weirdos from another planet", ed. Warner book.



EACH DAY I COUNT THE HOURS
UNTIL SCHOOL'S OVER. THEN I
COUNT THE DAYS UNTIL THE
WEEKEND. THEN I COUNT THE
WEEKS UNTIL THE MONTH IS
OVER, AND THEN THE MONTHS
UNTIL SUMMER.



I ALWAYS HAVE TO POSTPONE
WHAT I *WANT* TO DO FOR
WHAT I *HAVE* TO DO!



Fonte: Bill Watterson, "Calvin and Hobbes - weirdos from another planet", ed. Warner book.

40/40